2. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{9}{x^2 + x - 2}$.

***a*)** Determineu el domini, les possibles asímptotes, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement de la funció.
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu l'equació general de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 4$. Representeu en un mateix gràfic la funció $f(x)$ i la recta tangent.
[1,25 punts]

Solució:

a) La funció $f(x)$ és un quocient de polinomis. Per tant, el seu domini seran tots els nombres reals excepte aquells punts que anul·lin el polinomi denominador.

Si resolem $x^2 + x - 2 = 0$, obtenim $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ i, per tant, el denominador s'anul·la pels valors $x = -2$ i $x = 1$.

Així doncs, tindrem: $\boxed{Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (-2,1) \cup (1, +\infty)}$.

Asímptotes verticals: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to -2} f(x) = \frac{9}{0} = \infty \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota vertical a } x = -2}$

$x = 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{9}{0} = \infty \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota vertical a } x = 1}$

Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \frac{9}{+\infty} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota horitzontal a } x = 0}$$

Asímptotes obliqües: com que la funció $f(x)$ té asímptota horitzontal, quan $x \to \mp\infty$ aleshores $\boxed{f(x) \text{ no té asímptotes obliqües.}}$

Màxims i mínims relatius: són els punts que anul·len la funció derivada.

$f'(x) = \frac{-9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} \quad f'(x) = 0? \Rightarrow \; -9(2x+1) = 0 \Rightarrow \; 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

Mitjançant el signe de la derivada primera, podem comprovar que a $\boxed{x = -\frac{1}{2} \text{ hi ha un màxim relatiu}}$, ja que abans la derivada és positiva $(f'(-1) > 0)$ i després és negativa $(f'(0) < 0)$.

Pel que fa a la monotonia de la funció, atès que la funció té discontinuïtats asimptòtiques, busquem quin signe té la derivada en els diferents intervals de continuïtat:

	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
f'	> 0	> 0	< 0	< 0
f	creixent	creixent	decreixent	decreixent

Per tant:

$\boxed{f(x) \text{ és creixent a } (-\infty,-2) \cup \left(-2,-\frac{1}{2}\right).}$

$\boxed{f(x) \text{ és decreixent a } \left(-\frac{1}{2},1\right) \cup (1,+\infty).}$

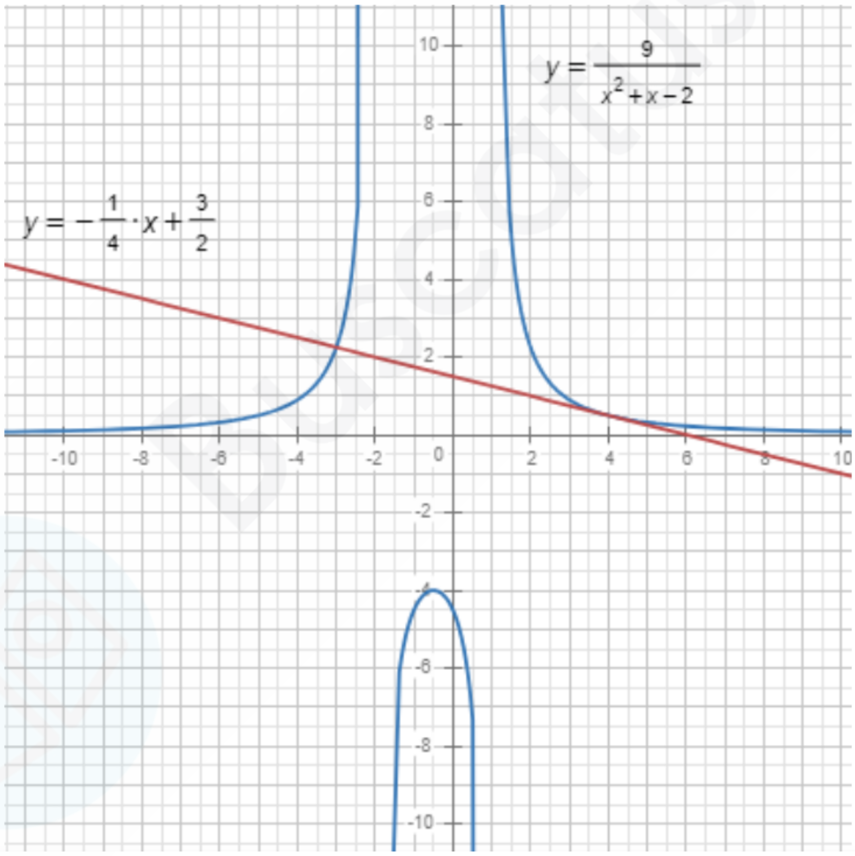
b) Per a calcular l'equació general de la recta tangent a la funció, fem servir la fórmula $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ per al cas $a = 4$.

$f(4) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, la recta passa pel punt $(4,\ \frac{1}{2})$

$f'(4) = \frac{-81}{324} = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}$

La recta tangent serà $\boxed{y =} -\frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}$.

Per a la representació de la funció i de la recta tangent, utilitzem els resultats de l'apartat anterior i es pot complementar amb una petita taula de valors:



4. ***a)*** Considereu la funció $f(x)=\begin{cases} \ln(x), & \text{si } x \in (0,\, \mathrm{e}) \\ ax+b, & \text{si } x \in [\mathrm{e},\, 4) \end{cases}$, on a i b són nombres reals. Trobeu el valor de a i de b per tal que la funció sigui contínua i derivable a l'interval $(0,\, 4)$.
[1,25 punts]

b) Calculeu la funció $g(x)$ que satisfà $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ i que passa pel punt $(0,\, -1)$.
[1,25 punts]

Solució:

a) Per tal que $f(x)$ sigui contínua, com que les dues funcions que defineixen $f(x)$, la logarítmica i la lineal, són contínues en el domini on estan definides respectivament, només ens cal imposar la continuïtat en el valor $x = e$:

$$f(e) = ae + b = \lim_{x\to e} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to e^-} \ln(x) = \ln(e) = 1 \\ \lim\limits_{x\to e^+} (ax + b) = ae + b \end{cases} \Rightarrow ae + b = 1.$$

Per tal que sigui derivable, com que les dues funcions que defineixen la funció $f(x)$, la logarítmica i la lineal, són derivables en el domini on estan definides respectivament, tenim:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \in (0, e) \\ a \text{ si } x \in (e, 4) \end{cases}.$$

Per tant, només ens cal imposar la derivabilitat a $x = e$.

$$f'(e) = \lim_{x\to e} f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to e^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \\ \lim\limits_{x\to e^+} a = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{e}}.$$

I com que $ae + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot e + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$.

b) Busquem primer la integral indefinida $\int \frac{x^3}{9x^4+1} dx$.

Multiplicant i dividint adequadament, podem tenir al numerador la funció derivada de la funció que hi ha al denominador:

$$\int \frac{x^3}{9x^4 + 1} dx = \frac{1}{36} \int \frac{36x^3}{9x^4 + 1} dx = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) + k.$$

Així que la funció $g(x)$ serà de la forma $g(x) = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) + k$.

Finalment, per a trobar k, apliquem que la funció que busquem ha de passar pel punt $(0,\ -1)$.

$$g(0) = \frac{1}{36} \ln(9 \cdot 0^4 + 1) + k = \frac{1}{36} \ln(1) + k = 0 + k = k$$

Per tant, tenim que, si $g(0) = -1$, aleshores $k = -1$.

Així, $\boxed{g(x) = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) - 1}$.