4. ***a***) Considereu la funció $f(x)=\begin{cases}\ln(x), & \text{si } x\in(0,\,\mathrm{e})\\ ax+b, & \text{si } x\in[\mathrm{e},\,4)\end{cases}$, on a i b són nombres reals. Trobeu el valor de a i de b per tal que la funció sigui contínua i derivable a l'interval (0, 4).
[1,25 punts]

b) Calculeu la funció $g(x)$ que satisfà $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ i que passa pel punt (0, −1).
[1,25 punts]

Solució:

a) Per tal que $f(x)$ sigui contínua, com que les dues funcions que defineixen $f(x)$, la logarítmica i la lineal, són contínues en el domini on estan definides respectivament, només ens cal imposar la continuïtat en el valor $x = e$:

$$f(e) = ae + b = \lim_{x\to e} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to e^-} \ln(x) = \ln(e) = 1 \\ \lim_{x\to e^+} (ax+b) = ae + b \end{cases} \Rightarrow ae + b = 1.$$

Per tal que sigui derivable, com que les dues funcions que defineixen la funció $f(x)$, la logarítmica i la lineal, són derivables en el domini on estan definides respectivament, tenim:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \in (0, e) \\ a \text{ si } x \in (e, 4) \end{cases}.$$

Per tant, només ens cal imposar la derivabilitat a $x = e$.

$$f'(e) = \lim_{x\to e} f'(x) = \begin{cases} \lim_{x\to e^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \\ \lim_{x\to e^+} a = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{e}}.$$

I com que $ae + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot e + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$.

b) Busquem primer la integral indefinida $\int \frac{x^3}{9x^4+1} dx$.

Multiplicant i dividint adequadament, podem tenir al numerador la funció derivada de la funció que hi ha al denominador:

$$\int \frac{x^3}{9x^4+1} dx = \frac{1}{36} \int \frac{36x^3}{9x^4+1} dx = \frac{1}{36} \ln(9x^4+1) + k.$$

Així que la funció $g(x)$ serà de la forma $g(x) = \frac{1}{36} \ln(9x^4+1) + k$.

Finalment, per a trobar k, apliquem que la funció que busquem ha de passar pel punt $(0, -1)$.

$$g(0) = \frac{1}{36} \ln(9 \cdot 0^4 + 1) + k = \frac{1}{36} \ln(1) + k = 0 + k = k$$

Per tant, tenim que, si $g(0) = -1$, aleshores $k = -1$.

Així, $\boxed{g(x) = \frac{1}{36} \ln(9x^4+1) - 1}$.