3. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre a.

a) Calculeu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

Solució:

a) Per a estudiar el rang de la matriu A, calculem primer el determinant de la matriu per a veure quan té rang màxim:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix} = 45 + 24a^2 + 21a^2 - 105 - 12a^2 - 18a^2 = 15a^2 - 60$$

$$15a^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

Així doncs, se'ns obren els casos següents:

CAS I. $\boxed{\text{Si } a \neq \pm 2, rang\ A = 3}$, atès que el determinant d'ordre 3 és no nul.

CAS II. $\boxed{\text{Si } a = 2, rang\ A = 2}$, atès que el determinant d'ordre 3 és nul i hi ha un menor d'ordre 2 no nul ($\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$).

CAS III. $\boxed{\text{Si } a = -2, rang\ A = 2}$, atès que el determinant d'ordre 3 és nul i hi ha un menor d'ordre 2 no nul ($\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$).

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quan multipliquem les matrius, veiem que es tracta d'un sistema d'equacions lineal i homogeni. Per tant, sempre té com a mínim la solució $(0, 0, 0)$.

Tenim $\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 4x + 5y + 6z & = & 0 \\ 7x + 8y + 9z & = & 0 \end{cases}$ amb la matriu ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right)$.

Observem que la matriu de coeficients és la matriu A de l'apartat anterior per al valor $a = 2$. Per tant, el rang de la matriu de coeficients és 2.

De tota manera, notem que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$

i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$. Per tant, $rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2$.

El rang de la matriu del sistema i també el rang de la matriu ampliada són 2 (perquè la columna $(0, 0, 0)$ dels termes independents no pot augmentar el $rang(A)$), i el nombre d'incògnites és 3. En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb 3 – 2 = 1 grau de llibertat.

El menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar. Per tant:

$$\begin{cases} x + 2y &= -3z \\ 4x + 5y &= -6z \end{cases}$$

Per a trobar x i y en funció de z podem aplicar el mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ -6z & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-15z + 12z}{-3} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 4 & -6z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6z + 12z}{-3} = -2z$$

Per tant, les matrius solució demanades són les següents:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \quad z \text{ paràmetre.}}$$

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible.
[1,25 punts]

b) Per al cas $a = 3$, resoleu l'equació $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

Solució:

a) La matriu A serà invertible si i només si el seu determinant és diferent de zero.

Busquem el determinant aplicant la regla de Sarrus, per tal de saber per a quins valors del paràmetre a aquest determinant no s'anul·la:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}$$
$$= a(a+1)(-a-3) + a(a-1)(2a+1) - 0 - 0 + 2a(a+3)$$
$$= a(-a^2 - 4a - 3 + 2a^2 + a - 2a - 1 + 2a + 6) = a(a^2 - 3a + 2).$$

Quan resolem $|A| = 0$, obtenim $a = 0$ i $a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1. \\ a = 2 \end{cases}$

$\boxed{\text{La matriu A serà invertible quan } a \neq 0, 1, 2.}$

b) Quan $a = 3$, tenim $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Mirem si la matriu A és invertible. En cas afirmatiu, calculem la inversa.

Observació: per l'apartat anterior, com que $a = 3$, ja sabríem que la matriu té inversa.

$|A| = -72 + 42 + 36 = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la matriu A és invertible.

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Plantejament de la resolució de l'equació:

$$A \cdot X = B - 3I \quad \rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment, obtenim X:

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot I \quad \rightarrow \quad \boxed{X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}}.$$