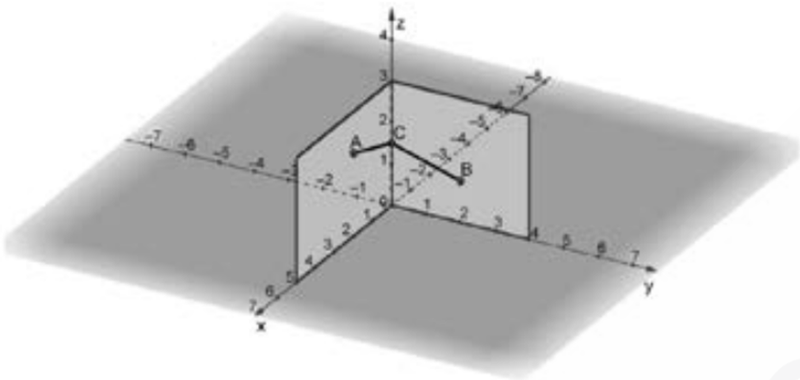
6. La imatge següent mostra dues parets perpendiculars d'una sala representades en uns eixos de coordenades, de manera que una paret és al pla $y = 0$ i l'altra és al pla $x = 0$.



En el punt $A = (2, 0, 2)$ hi volem penjar un altaveu que ha d'estar connectat a un equip de so, el qual està situat a l'altra paret, en el punt $B = (0, 2, 1)$. La connexió entre A i B la farem mitjançant un cable que passi pel punt $C = (0, 0, h)$, situat a la recta vertical d'intersecció de les dues parets. Com que la qualitat del so depèn, entre altres factors, de la longitud del cable que uneix els dos aparells, volem fer una instal·lació amb el mínim de cable possible.

a) Comproveu que la longitud total del cable necessari, en funció de l'altura h per on ha de passar el cable a l'eix vertical OZ, ve donada per l'expressió $L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$.
[0,75 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt C per on ha de passar el cable per tal que la longitud del cable sigui mínima. Calculeu aquesta longitud mínima del cable.
[1,75 punts]

Solució:

a)

Considerem els tres punts de la imatge: $A = (2, 0, 2)$, $B = (0, 2, 1)$ i $C = (0, 0, h)$.

$$d(A, C) = \sqrt{2^2 + (2-h)^2} = \sqrt{4 + 4 - 4h + h^2} = \sqrt{h^2 - 4h + 8}$$

$$d(B, C) = \sqrt{2^2 + (1-h)^2} = \sqrt{4 + 1 - 2h + h^2} = \sqrt{h^2 - 2h + 5}$$

Per tant, efectivament, $\boxed{L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}}$.

b)

Per a trobar el valor mínim, derivem la funció $L(h)$ i en trobem els punts singulars:

$$L'(h) = \frac{2h-4}{2\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{2h-2}{2\sqrt{h^2-2h+5}} = \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}.$$

Quan fem $L'(h) = 0$: $\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} = 0$

$\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} = -\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} \Rightarrow (h-2)\sqrt{h^2-2h+5} = -(h-1)\sqrt{h^2-4h+8}$

Si elevem els dos termes de la igualtat al quadrat, obtenim:

$$(h-2)^2(h^2-2h+5) = (h-1)^2(h^2-4h+8)$$

D'on:

$$(h^2-4h+4)(h^2-2h+5) = (h^2-2h+1)(h^2-4h+8)$$

$$h^4 - 2h^3 + 5h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 20h + 4h^2 - 8h + 20 =$$

$$= h^4 - 4h^3 + 8h^2 - 2h^3 + 8h^2 - 16h + h^2 - 4h + 8$$

Operant, obtenim $8h = 12$ i, per tant, $h = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Per a comprovar que aquest valor correspon al mínim, n'hi ha prou observant el signe de la derivada abans i després d'aquest valor dins del domini del context de la funció. Per exemple, podem verificar que la derivada és negativa abans d'aquest valor, per exemple per a $x = 1$, ($L'(1) = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$), i positiva després d'aquest valor, per exemple, per a $x = 2$, ($L'(2) = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$).

Per tant, la longitud mínima del cable s'aconsegueix quan $\boxed{C = (0,0,\frac{3}{2})}$.

I la longitud mínima serà:

$$\boxed{L\left(\frac{3}{2}\right) =} \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 8} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 5} = \sqrt{\frac{9}{4} - 6 + 8} + \sqrt{\frac{9}{4} - 3 + 5}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 2} = 2\sqrt{\frac{17}{4}} = \boxed{\sqrt{17} \text{ unitats de longitud}}.$$