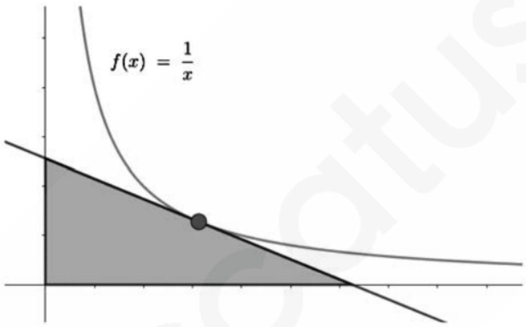
2. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f* en el punt d'abscissa $x=2$.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f* en el punt d'abscissa $x=k$, en què *k* és un nombre real positiu.
[0,75 punts]

c) Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat *b* determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.
[1 punt]



Solució:

2.

Resolució:

a)

$f(x) = {}^{1}/_{x} \qquad f'(x) = {}^{-1}/_{x^2},$

Punt per on passa la recta, $(2, f(2)) = (2\,, {}^{1}/_{2})$
Pendent de la recta $= f'(2) = {}^{-1}/_{4}$

$y - \frac{1}{2} = \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot (x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{4}x + 1}$

b)

$f(x) = {}^{1}/_{x} \qquad f'(x) = {}^{-1}/_{x^2}$

Punt per on passa la recta, $(k, f(k)) = (k\,, {}^{1}/_{k})$
Pendent de la recta $= f'(k) = {}^{-1}/_{k^2}$

$y - \frac{1}{k} = \left(\frac{-1}{k^2}\right) \cdot (x-k) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{k^2}x + \frac{2}{k}}$.

c)

Calculem el punt de tall de la recta tangent $y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$ amb l'eix d'abscisses:

$\begin{cases} y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{Tall amb l'eix d'abscisses} = (2k\,,\ 0)$

Punt de tall de la recta tangent $y = \frac{-x}{k^2} + \frac{2}{k}$ amb l'eix d'ordenades:

$\begin{cases} y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{Tall amb l'eix d'ordenades} = \left(0\,,\ \frac{2}{k}\right)$

$\grave{A}rea\ del\ triangle = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{2}{k} = 2\ u^2$

El triangle té àrea constant igual a 2 unitats de superfície, per a qualsevol valor del paràmetre *k*.