1. Siguin $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ i la matriu identitat d'ordre dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $(A - 2I)^2 = 3I$.
[0,5 punts]

b) Utilitzant la igualtat de l'apartat anterior, trobeu la matriu inversa de la matriu A en funció de les matrius A i I, i comproveu que coincideix amb la matriu B.
[1,25 punts]

c) Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat $A \cdot X = B$.
[0,75 punts]

Solució:

1.

Resolució:

$$(A-2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

$(A-2I)^2 = 3I \ \leftrightarrow A^2 - 4A + 4I = 3I \ \leftrightarrow A^2 - 4A = -I \ \leftrightarrow 4A - A^2 = I$ i traient factor comú d'A: $(4I - A) \cdot A = I \ \leftrightarrow \boxed{A^{-1} = 4I - A}$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = 4I - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

De $A \cdot X = B$, aïllant la matriu, multiplicant per la inversa d'A per l'esquerra:

$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B$, com $A^{-1} = B$, $(A^{-1} \cdot A)X = B \cdot B \ \leftrightarrow \boxed{X = B^2}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}}$$

Observació: El càlcul de la matriu X es pot plantejar també en termes d'un sistema d'equacions lineals. La puntuació serà la mateixa repartida en els diferents passos de la resolució.

3. Sigui el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, en què m és un nombre real.

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre m.
[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema, si té solució, per al cas $m=1$.
[1,25 punts]

Solució:

3.

Resolució:

a)

El sistema en la forma normal és $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+my+z=2 \\ 3x+y-mz=3 \end{cases}$. Calculem el determinant de la matriu dels coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = (-2m^2-1+3)-(-3m-m+2) = -2m^2+4m = \boldsymbol{2m(2-m)}$$

$|A| = 0 \; \rightarrow \; m = 0$ i $m = 2$, són els valors a tenir en compte en la discussió.

Tenim tres casos a discutir:

Si $\boldsymbol{m \neq 0}$ **i** $\boldsymbol{m \neq 2}$, com el $rang(A) = 3 \; [|A| \neq 0] \; = rang(A^*) \; =$ nombre d'incògnites, tenim un **SCD** (Sistema Compatible Determinat). **Solució única.**

Si $\boldsymbol{m = 0}$, per Gauss obtenim:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1-f_2 \\ 3f_1-f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ f_3-f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rang(A) = 2 \; = rang(A^*) < 3 =$ nombre d'incògnites.

Per tant, es tracta d'un SCI (Sistema Compatible Indeterminat) amb $(3-2=1)$ un grau de llibertat. Infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

Si $\boldsymbol{m = 2}$, per Gauss obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1-f_2 \\ 3f_1-f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ f_3/3 \\ 3f_3-5f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$rang(A) = 2 \; \neq rang(A^*) = 3 \Rightarrow$ SI (Sistema Incompatible). No hi ha solució.

b)

Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$, quan substituïm en el sistema obtenim:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ f_3 - 2f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = 2 \\ y + 3 \cdot \dfrac{3}{2} = 3 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = -3/2 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}}$$

Observació: L'apartat a) es pot resoldre via el càlcul de rangs i l'apartat b) es pot resoldre també pel mètode de Cramer.