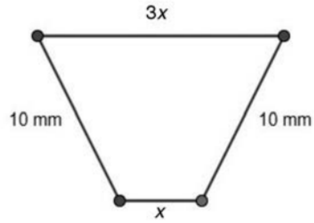
6. Volem construir una peça metàl·lica que tingui per secció un trapezi isòsceles amb la base superior tres vegades més llarga que la base inferior. Els altres costats del trapezi fan 10 mm, tal com podeu observar en la figura següent:



***a*)** Expresseu l'altura del trapezi en funció de la longitud x de la base inferior.
[0,5 punts]

***b*)** Calculeu la longitud de la base inferior del trapezi de manera que l'àrea de la peça sigui màxima i trobeu el valor d'aquesta àrea màxima.
[2 punts]

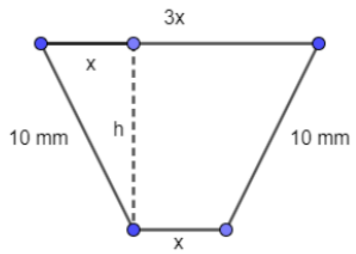
Solució:

6.

Resolució:

a)

A partir de la situació exposada tenim el gràfic següent:



Pel teorema de Pitàgores s'obté que $x^2 + h^2 = 10^2$, i per tant $\boxed{h = \sqrt{100 - x^2}}$

b)

L'àrea del trapezi és $A(x) = (x + 3x)/2 \cdot h = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Per a trobar els candidats a valors que fan màxima aquesta àrea calcularem la funció derivada $A'(x)$ i obtindrem les solucions de l'equació $A'(x) = 0$.

$$A'(x) = 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}}(-2x)$$
$$= 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$
$$= \frac{4(50 - x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Per tant tindrem $A'(x) = 0$ quan $50 - x^2 = 0$, és a dir $x^2 = 50$ i $x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$ ≈±7'07

A partir del context de l'enunciat, l'únic candidat és el valor positiu $x = \sqrt{50} =$ 7'07 mm. Ara cal comprovar que amb aquest valor l'àrea sigui màxima. Això es comprova veient que per valors propers l'àrea és més petita:

A(7)= 99'980

A($\sqrt{50}$) = 2· $\sqrt{50}$ · $\sqrt{100 - 50}$ = 2·$\sqrt{50}$ · $\sqrt{50}$ =100

A(7'1)=99.9966

Per tant, el valor de la base petita que fa l'àrea màxima és de $5\sqrt{2} = 7'07$ mm i el valor de l'àrea és 100 mm²

Observació: Per a la comprovació de la condició de màxim es podria també fer servir, alternativament, el comprovar que la derivada segona de la funció àrea és negativa per al valor $x = \sqrt{50}$.