5. Siguin r_1 i r_2 les rectes definides per $r_1\colon x-1=y=-z$ i per $r_2\colon x=y=z$, respectivament.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment les rectes r_1 i r_2.
[1,75 punts]

b) Calculeu la distància entre r_1 i r_2.
[0,75 punts]

Solució:

5.

Resolució:

a)

A partir de les equacions contínues de l'enunciat podem escriure les rectes r_1 i r_2 en forma vectorial i paramètrica:

$$r_1: (x, y, z) = (1,0,0) + \lambda\,(1,1,-1) = (1+\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$r_2: (x, y, z) = (0,0,0) + \mu\,(1,1,1) = (\mu, \mu, \mu)$$

Un vector qualsevol $\overrightarrow{A_1A_2}$ format en prendre $A_1 \in r_1$, $A_2 \in r_2$ vindrà expressat en termes de $\overrightarrow{A_1A_2} = (\mu-\lambda-1,\ \mu-\lambda,\ \mu+\lambda)$ amb $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

La recta que passi per A_1 i A_2 tallarà r_1 i r_2 perpendicularment si el vector $\overrightarrow{A_1A_2}$ és perperndicular als vectors directors de cada recta, és a dir si es compleixen les condicions següents:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp (1,1,-1) \;\rightarrow\; (\mu-\lambda-1, \mu-\lambda, \mu+\lambda)\cdot(1,1,-1) = 0$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp (1,1,1) \;\rightarrow\; (\mu-\lambda-1, \mu-\lambda, \mu+\lambda)\cdot(1,1,1) = 0.$$

Efectuant els dos productes escalars les condicions anteriors es converteixen en el sistema d'equacions:

$$\mu - 3\lambda - 1 = 0$$

$$3\mu - \lambda - 1 = 0$$

Si a la segona equació li restem 3 vegades la primera obtenim $8\lambda = -2$ i per tant $\lambda = \frac{-1}{4}$, i quan substituïm en la primera obtenim $\mu = 1 + 3\lambda = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Així els punts respectius de cada recta són: $A_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ i $A_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

La recta que uneix aquests punts és la perpendicular que talla totes dues rectes i tindrà vector director $\overrightarrow{A_1A_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \approx (-1,1,0)$ i equació vectorial

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \alpha\,(-1,1,0)$$

I, per tant, l'equació paramètrica serà

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{1}{4} - \alpha, \frac{1}{4} + \alpha, \frac{1}{4}\right), amb\ \alpha \in \mathbb{R}}$$

b)

Aplicant l'apartat anterior tenim que

$$d\,(r_1, r_2) = d\,(A_1, A_2) = \|\overrightarrow{A_1A_2}\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\,u}.$$

Observació: Amb independència de l'apartat a) aquest apartat b) es pot resoldre aplicant sigui la fórmula general per a la distància entre dues rectes o bé via la distància entre una recta i llur projecció perpendicular sobre l'altra.