

SÈRIE 2

1.

- a) Si anomenem x el nombre de persones que han practicat esquí aquàtic, y el nombre de persones que han practicat caiac i z el nombre de persones que han practicat moto aquàtica obtenim les equacions següents:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 45 \\40x + 20y + 60z &= 1700 \\x &= 3y\end{aligned}$$

- b) Dividim la segona equació per 20 i obtenim el sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases}x + y + z = 45 \\2x + y + 3z = 85 \\x - 3y = 0\end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\2 & 1 & 3 & 85 \\1 & -3 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\0 & 1 & -1 & 5 \\0 & 4 & 1 & 45\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45 \\0 & 1 & -1 & 5 \\0 & 0 & 5 & 25\end{array}\right)$$

Per tant, tenim que $5z = 25$, és a dir, $z = 5$, $y - 5 = 5$, per tant $y = 10$ i, finalment, $x + 10 + 5 = 45$, és a dir, $x = 30$.

Així doncs 30 persones han fet esquí aquàtic, 10 han fet caiac i 5 moto aquàtica.

Criteris de correcció:

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.

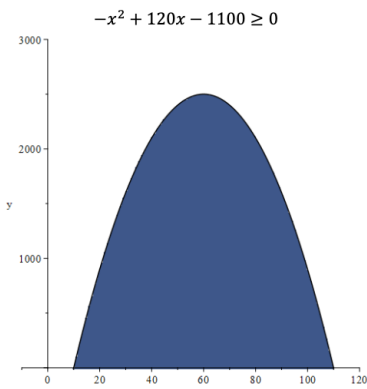
b) Procediment de resolució del sistema: 1 punt. Obtenció del resultat correcte de les tres incògnites: 0,5 punts.

2.

- a) Els beneficis de l'empresa venen donats per la diferència entre els ingressos per les vendes i les despeses de producció:

$$f(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Per saber quan la fàbrica no té pèrdues hem de resoldre la inequació següent:



Comencem resolent l'equació $-x^2 + 120x - 1100 = 0$, que té per solucions $x = 10$ i $x = 110$. Com que es tracta d'una paràbola amb el coeficient principal negatiu, la solució de la inequació és $x \in [10, 110]$. Per tant la producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles, ambdós inclosos, per tal de no tenir pèrdues.

- b) Per a obtenir el màxim igulem a zero la derivada de la funció que ens dona els beneficis:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + 120 \\ -2x + 120 &= 0 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Per tal de justificar que es tracta d'un màxim podem fer servir la taula de monotonia:

| | | | |
|---------|-----------|-------|-------------|
| | $[0, 60)$ | 60 | $(60, 110]$ |
| $f'(x)$ | Positiu | Zero | Negatiu |
| $f(x)$ | Creixent | Màxim | Decreixent |

Per tant, cal fabricar 60 vehicles i el benefici obtingut serà de $f(60) = 2500$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar la funció que dona els beneficis: 0,5 punts. Resoldre l'equació: 0,5 punts.
Justificar que la solució està entre 10 i 100: 0,25 punts.

b) Calcular la derivada: 0,5 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts.

3.

- a) Denotem per x el nombre de caixes tipus A i per y el nombre de caixes tipus B .
El sistema d'inequacions donat per les restriccions del problema és el següent:

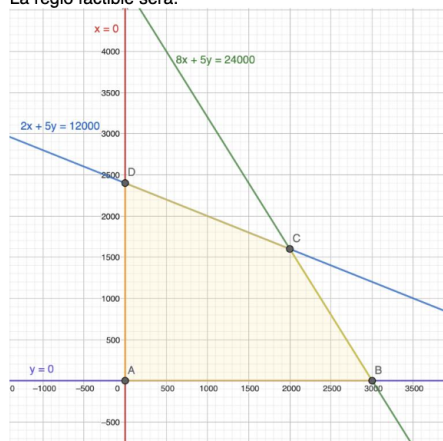
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \end{cases}$$

Els ingressos per la venda d'una caixa del tipus A és: $8 \cdot 0,60 + 2 \cdot 0,70 = 6,2$ €,
i els ingressos per la venda d'una caixa del tipus B és: $5 \cdot 0,60 + 5 \cdot 0,70 = 6,5$ €.

Per tant, la funció objectiu, que ens dona els ingressos per la venda de les caixes,
és:

$$F(x, y) = 6,2x + 6,5y$$

La regió factible serà:



- b) Els vèrtexs de la regió factible són: $(0,0)$, $(3000,0)$, $(2000,1600)$ i $(0,2400)$.
Si avaluem la funció objectiu als quatre vèrtexs obtenim:

$$\begin{aligned} F(0,0) &= 0 \\ F(3000,0) &= 18600 \\ F(2000,1600) &= 22800 \\ F(0,2400) &= 15600 \end{aligned}$$

Per tant, els ingressos màxims s'obtenen venent 2.000 caixes del tipus A i 1.600 caixes del tipus B i són de 22.800 €.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.

4.

a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10 \text{ milers d'infectats i}$$

$$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{4-4+4} = 15 \text{ milers d'infectats.}$$

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igualem a zero obtenim com a possibles extrems $t = -2$ (que no té sentit en el context del problema, ja que $t \geq 0$) i $t = 2$.

Com que $f'(1) > 0$, $f'(3) < 0$ deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a $t = 2$ i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de $f(2) = 15$ milers de persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun.
Càlcul del límit: 0,5 punts

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.

5.

- a) Fem el producte de la matriu A per ella mateixa i igulem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que cal que $1 + 2a = 1$ i per tant $a = 0$.

- b) Per $a = -1$ fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que $A^{-1} = A^3 = -A$.

D'altra banda,

$$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A.$$

Criteris de correcció:

a) Càlcul A^2 : 0,5 punts. Trobar el valor de a : 0,5 punts.

b) Càlcul de A^2 , A^3 i A^4 : 0,5 punts en total. Deducir el valor de A^{-1} : 0,5 punts. Deducir el valor de A^{23} : 0,5 punts.

6.

- a) Amb l'oferta 4x3 el cost de quatre ampolles d'aigua és

$$0,70 \cdot 3 = 2,10 \text{ euros.}$$

Per calcular el preu amb el descompte del 20% comencem calculant el preu normal sense descompte de 4 ampolles

$$0,70 \cdot 4 = 2,80 \text{ euros}$$

I ara restem al resultat un 20%

$$2,80 \text{ euros} - 0,20 \cdot 2,80 \text{ euros} = 2,24 \text{ euros}$$

Per tant, aquesta setmana li costaran 2,10 euros i la setmana vinent 2,24 euros.

Anomenem ara x el percentatge de descompte que cal aplicar al total de 2,80 euros per tal d'obtenir 2,10 euros. L'equació que modelitza aquesta situació és la següent:

$$2,80 \text{ euros} - 2,80 \cdot \frac{x}{100} \text{ euros} = 2,10 \text{ euros}$$

$$2,80 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2,10$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{3}{4}$$

$$x = 25$$

Per tant, caldria aplicar un descompte del 25% per igualar l'oferta 4x3.

- b) Per saber el descompte que caldria aplicar per igualar una oferta $m \times (m - 1)$ igualem el cost d'ambdues promocions per obtenir el percentatge demanat:

$$0,70 \cdot m - 0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = 0,70 \cdot (m - 1)$$

$$0,70 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0,70 \cdot m - 0,70$$

$$-0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = -0,70$$

Aïllant la x obtenim $x = \frac{100}{m}$ que és el percentatge que buscàvem.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu amb l'oferta 4×3 : 0,25 punts. Càlcul del preu amb l'oferta del 20%: 0,25 punts. Plantejament de l'equació per a trobar el percentatge: 0,5 punts. Resolució de l'equació i trobar el percentatge que iguala l'oferta: 0,5 punts.

b) Plantejament de la nova equació: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts.