UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2021-2022**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.
b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B)X = Y$.

A.2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por

$$7y - 8x \leq 3400, \quad 3x - 8y \leq 2000, \quad 11x + 14y \geq 9500, \quad x \leq 1200, \quad y \leq 1000.$$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

A.3. (2 puntos) Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.
a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq 1 \\ g(x), & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la función h sea continua en $\mathbb{R}$?
b) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g.

A.4. (2 puntos) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además suponga que $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}7$.
a) Calcule $P(A^c)$.
b) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.
Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

A.5. (2 puntos) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del $95\,\%$ para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo $0{,}2$ y $0{,}3$ los extremos de dicho intervalo.
a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.
b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + ay + z & = & 2 \\ x - az & = & 0 \\ x + y + z & = & 2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.
b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

B.2. (2 puntos)
a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.
b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

B.3. (2 puntos) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x\,\frac{170 - 0{,}85x}{5},$$

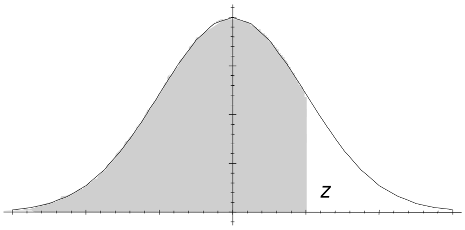
en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.
a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.
b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.
Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

B.4. (2 puntos) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el $30\,\%$ de las invitaciones, Berta el $40\,\%$ y Carla las restantes. El $2\,\%$ de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son $3\,\%$ y $1\,\%$, respectivamente.
a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.
b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son $157{,}125$ y $182{,}875$.
a) Calcule el valor de la media muestral.
b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos. En todos los casos, se valorará el razonamiento correcto.

Ejercicio A.1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la condición de inversa................................ 0,25 puntos.

Obtención de la ecuación.. 0,25 puntos.

Obtención correcta de los parámetros.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la solución... 0,50 puntos.

Planteamiento correcto………………..………………………………… 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente de forma manual. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).

Ejercicio A.2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Identificación correcta de los vértices .... 0,50 puntos.

Representación correcta de la región factible…………………………… 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto del valor mínimo de la función .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto del punto óptimo.. 0,25 puntos..

Estándares de aprendizaje evaluables: Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones.

Ejercicio A.3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento del problema……………..……………........................ 0,25 puntos.

Cálculo del límite por la izquierda……………….............................. 0,25 puntos.

Cálculo del límite por la derecha ……………………………… .... 0,25 puntos.

Identificación del valor de la constante………………………………… 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento del problema……………..……………........................ 0,50 puntos.

Identificación correcta de la región ………………………………… ... 0,25 puntos.

Cálculo correcto del área………..… .... 0,25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Aplica los conceptos de continuidad de funciones y de integrales como áreas de conjuntos en el plano. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

Ejercicio A.4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento del problema.. 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento del problema.. 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula la probabilidad de sucesos usando propiedades de las medidas de probabilidad.

Ejercicio A.5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión del estimador .... 0,50 puntos.

Obtención de la cota del error.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto del error. .... 0,50 puntos.

Planteamiento correcto……………………………………………0,25 puntos.

Identificación del percentil .... 0,25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula probabilidades asociadas a la distribución normal. Comprende el concepto de intervalos de confianza para la proporción de una población.

Ejercicio B.1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los valores críticos .... 0,50 puntos.

Discusión correcta .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema .... 0,50 puntos.

Planteamiento del problema.. 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Manipula el sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas y lo resuelve en los casos en que sea posible. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. El sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales.

Ejercicio B.2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo de los valores de la función y de la derivada…………………… 0,50 puntos.

Identificación de los valores de las constantes...…………………………0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto

Identificación de la asíntota vertical .... 0,50 puntos.

Identificación de la asíntota oblicua…………………………………… 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula las asíntotas de funciones racionales. Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades de una función. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

Ejercicio B.3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Identificación del beneficio .... 0,50 puntos.

Identificación del máximo .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto .... 0,50 puntos.

Identificación del intervalo .... 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Resuelve problemas de optimización relativos a las ciencias sociales. Extrae conclusiones a partir de datos relativos a funciones de costes, ingresos, beneficios. Aplica los conceptos de derivadas, máximo y mínimos de funciones. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

Ejercicio B.4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento del problema.. 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento del problema.. 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula la probabilidad de sucesos usando fórmulas del cálculo de probabilidades, fórmula de probabilidad total, fórmula de Bayes.

Ejercicio B.5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de la media muestral.. 0,50 puntos.

Uso de los límites del intervalo de confianza .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Identificación del nivel de confianza. .... 0,50 puntos.

Identificación del percentil…………………………………………… . 0,25 puntos.

Identificación de la cota del error .... 0,25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula probabilidades asociadas a la distribución normal. Comprende el concepto de intervalos de confianza para la media de una población normal.

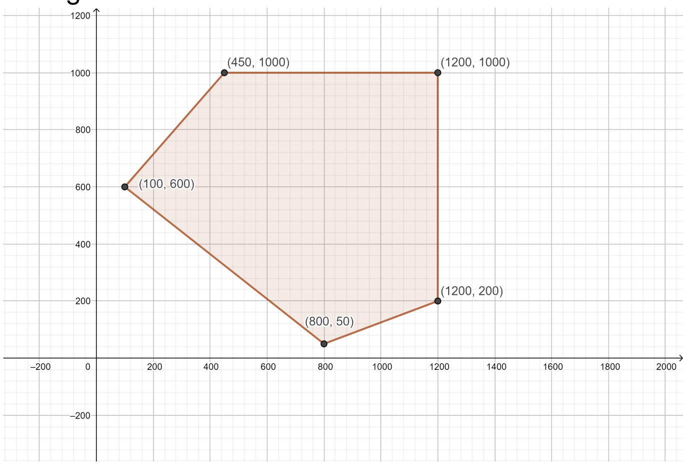
NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados

A.1. *a)* El determinante es $|A| = 4a$, que será igual a 0 si $a = 0$. Si a es distinto de este valor la matriz es invertible.

b) Para $a = 1$, la solución de $(A - B)X = Y$ es

$$X = (A-B)^{-1}Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A.2. *a)* La región S es



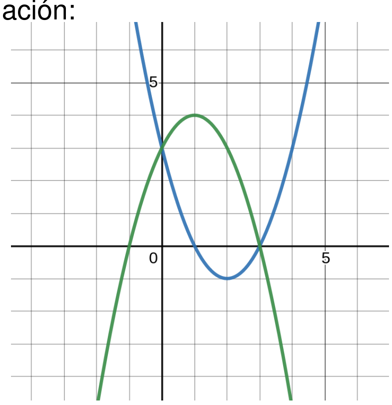
Está determinada por los vértices $A(100, 600)$; $B(450, 1000)$; $C(1200, 1000)$; $D(1200, 200)$ y $E(800, 50)$.

b) La región es cerrada y acotada; para calcular el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ se evalúa en los vértices de S:
$f(100, 600) = 2 \cdot 100 + 600 = 800$
$f(450, 1000) = 2 \cdot 450 + 1000 = 1900$
$f(1200, 1000) = 2 \cdot 1200 + 1000 = 3400$
$f(800, 50) = 2 \cdot 800 + 50 = 1650$
$f(1200, 200) = 2 \cdot 1200 + 200 = 2600$

El punto de la región en el cuál se alcanza el mínimo es A, siendo 800 el valor mínimo alcanzado.

A.3. *a)* El punto donde se debe estudiar la continuidad es $x = 1$. El límite por la izquierda de h en $x = 1$ es $f(1) = 0$ mientras que el límite por la derecha es $2 + a$. Para que coincidan debe ser $a = -2$.

b) Para delimitar la región, debemos hallar los puntos de corte de las gráficas de f y g para $a = 2$. Para ello, planteamos $x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3$. Al resolver esa ecuación resulta $x = 0$ o $x = 3$. La situación es la mostrada a continuación:



El área de la región es $\int_0^3 (g(x) - f(x))\, dx = 9$.

A.4. *a)* $1 = P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + 0{,}5$. Así que $P(A) = 0{,}5$ y en consecuencia $P(A^c) = 1 - P(A) = 0{,}5$

b) $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 0{,}8$

A.5. *a)* $\widehat{p} = \dfrac{0{,}2 + 0{,}3}{2} = 0{,}25$ y la cota del error de estimación es $\varepsilon = 0{,}3 - 0{,}25 = 0{,}05$.

b) Si $\widehat{p} = 0{,}25$, $n = 700$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, entonces el error máximo es $\varepsilon = 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{700}} \approx 0{,}0321$.

B.1. *a*) La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Su determinante es $|A| = 1 - a^2$, que será igual a 0 si $a = -1$ o 1. Entonces,

$$\begin{array}{lll} a = 1, & rg(A) = 2, & rg(\overline{A}) = 2 \\ a = -1, & rg(A) = 2, & rg(\overline{A}) = 3 \\ a \neq -1 \text{ o } 1, & rg(A) = 3, & rg(\overline{A}) = 3 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Sistema compatible indeterminado} \\ \text{Sistema incompatible} \\ \text{Sistema compatible determinado} \end{array}$$

b) Para $a = 0$

$$AX = b \Longrightarrow X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto la solución es $x = 0; y = 0; z = 2$

B.2. *a*) Sustituyendo obtenemos $2a + \frac{b}{2} = 4$, de donde $4a + b = 8$. Tenemos que $f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$. Sustituyendo en $x = 2$ obtenemos que $a - \frac{b}{4} = 0$ o, equivalentemente, que $b = 4a$. Resolviendo en a y b las dos ecuaciones que nos han quedado resulta $a = 1,\ b = 4$.

b) La función $g(x)$ presenta una asíntota vertical en $x = 0$. La recta $y = x$ es una asíntota oblícua tanto en ∞ como en $-\infty$

B.3. *a*) La función de beneficio es

$$B(x) = I(x) - C(x) = x\,\frac{170 - 0{,}85x}{5} - (10 + 2x + x^2) = 32x - 1{,}17x^2 - 10$$

$B'(x) = 32 - 2{,}34x$, así que $B'(x) = 0 \iff x = 32/2{,}34 = 13{,}67$ miles de litros. $B''(x) = -2{,}34 = B''(13{,}67)$, por tanto, hay un máximo en $x = 13{,}67$. Para maximizar el beneficio se deben vender $13{,}67$ miles de litros y el beneficio máximo sería $B(13{,}67) = 208{,}80$ miles de euros.

b) Para que el Coste Medio no supere los 10 mil euros,

$$\frac{C(x)}{x} \leq 10 \iff \frac{10 + 2x + x^2}{x} \leq 10 \iff x^2 - 8x + 10 = 0 \iff x = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{2}$$

Por tanto, la demanda debe encontrarse entre $1{,}55$ y $6{,}45$ miles de litros.

B.4. *a*) Sean A, B y C los eventos correspondientes a quien envía la invitación. Sea F el fallo de que una invitación escogida al azar no llegue a su destino. Entonces

$$P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) = 0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}03 \cdot 0{,}4 + 0{,}01 \cdot 0{,}3 = 0{,}021$$

b)

$$P(A|F) = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}3}{0{,}021} \approx 0{,}2857$$

B.5. *a*) $\overline{X} = \dfrac{157{,}125 + 182{,}875}{2} = 170.$

b) $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 182{,}875 - 170 \Longrightarrow z_{\alpha/2}\dfrac{15}{\sqrt{9}} = 12{,}875 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575 \Longrightarrow$ nivel de confianza del $99\,\%$