MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de la matriz A^3.. 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la matriz A^{2023}.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la existencia de inversa .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la inversa .... 0,75 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la pendiente de la tangente .... 0,50 puntos.
Ecuación correcta de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la derivada .... 0,25 puntos.
Obtención de la abscisa de los extremos relativos .... 0,50 puntos.
Determinación correcta del máximo/mínimo (basta con la abscisa)...... 0,25 puntos

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Estudio de la continuidad si $x \neq 2$ …………………………………….0,25 puntos.
Planteamiento correcto de la condición de continuidad en x=2 ....0,25 puntos.
Obtención correcta del valor del parámetro... ...0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto .... 0,25 puntos
Determinación de la primitiva .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la integral definida………………………………..0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.
Obtención correcta del tamaño mínimo... 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza .... 0,25 puntos.
Determinación correcta del intervalo... 0,50 puntos

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los valores críticos .... 0,50 puntos.

Discusión correcta .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema .... 1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Representación correcta de la región factible .... 0,50 puntos.

Obtención correcta de los vértices .... 0,50 puntos.

Encontrar el punto de valor máximo y su valor .... 0,50 puntos

Encontrar el punto de valor mínimo y su valor .... 0,50 puntos

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Estudio correcto del dominio…………………………………………...0,25 puntos.

Determinación correcta de las asíntotas verticales .... 0,25 puntos.

Justificación de la ausencia de asíntota horizontal .... 0,25 puntos

Determinación correcta de la asíntota oblicua .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Determinación correcta de la derivada .... 0,25 puntos.

Determinación correcta de los intervalos .... 0,75 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza .... 0,25 puntos.

Determinación correcta del intervalo .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.

Obtención correcta del tamaño mínimo .... 0,50 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

SOLUCIONES

A.1. *a)* $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = I \implies A^{2023} = (A^3)^{674} \cdot A = A$

b) $|A| = 1 \implies A$ es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.2. *a)* Calculamos la derivada

$f'(x) = 3x^2 + 4x \Longrightarrow f'(1) = 7 \Longrightarrow y - f(1) = f'(1)(x-1) \Longrightarrow y - 3 = 7(x-1) \Longrightarrow y = 7x - 4$

b)

$$f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad o \quad x = -\frac{4}{3}$$

$$f'(x) > 0 \quad si \quad x < -\frac{4}{3} \quad o \quad x > 0$$

$$f'(x) < 0 \quad si \quad -\frac{4}{3} < x < 0$$

Entonces, $x = -\frac{4}{3}$ es un máximo relativo y $x = 0$ es un mínimo relativo.

A.3. *a)* f es continua en cualquier valor de x diferente de 2. Para que la función sea continua en $x = 2$ necesitamos que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2 + 3) = 4a + 3$$

coincida con

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} e^x = e^2$$

y con

$$f(2) = e^2$$

Concluimos que $a = \dfrac{e^2 - 3}{4}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$.

b) El área pedida es

$$\int_2^3 (e^x)\, dx = |e^x|_2^3 = (e^3 - e^2)u^2$$

A.4. Sea $D =$'dedicar semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física' y $C =$'consumir de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día'. Sabemos que $P(D) = 0{,}274$, $P(C) = 0{,}651$ y $P(D \cup C) = 0{,}763$.

a) Por definición $P(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C)$, entonces

$$P(D \cap C) = P(D) + P(C) - P(D \cup C) = 0{,}274 + 0{,}651 - 0{,}763 = 0{,}162.$$

b) Sea $\bar{D}$ el suceso complementario de D y $\bar{C}$ el suceso complementario de C. La probabilidad pedida es:

$$P(\bar{D} \mid \bar{C}) = \frac{P(\bar{D} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}.$$

Calculamos

$$P(\bar{D} \cap \bar{C}) = P(\overline{D \cup C}) = 1 - P(D \cup C) = 1 - 0{,}763 = 0{,}237.$$

Por lo tanto,

$$P(\bar{D} \mid \bar{C}) = \frac{0{,}237}{1 - 0{,}651} = 0{,}68.$$

A.5. *a)* $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$; $z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$n \geq \dfrac{2{,}58^2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45}{0{,}1^2} = 164{,}7459$. El mínimo tamaño muestral es 165.

b) $\widehat{p} = 0{,}7, n = 100, z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$0{,}7 \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{100}}$

$IC = (0{,}6102; 0{,}7898)$

B.1. *a*) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 - 7a + 6 = 0 \iff a = 1, -3, 2.$

Si $a \neq 1, -3, 2 \Longrightarrow Rg(A) = Rg(A|B) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
Si $a = 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow Rg(A) = Rg(A|B) = 2 \Longrightarrow \text{ Compatible Indeterminado.}$$

Si $a = 2$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow Rg(A) = 2 \neq Rg(A|B) = 3 \Longrightarrow \text{ Incompatible.}$$

Si $a = -3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow Rg(A) = 2 \neq Rg(A|B) = 3 \Longrightarrow \text{ Incompatible.}$$

b) Si $a = 0$

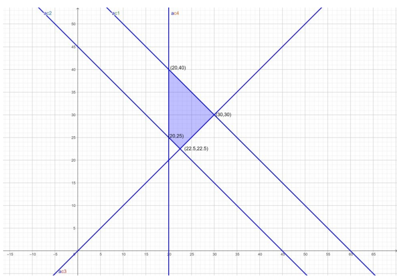
$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución es $z = 1/6$, $y = 2/3$, $x = -1/3$.

B.2. Sea x : minutos dedicados a ejercicios de fuerza e y : minutos dedicados a ejercicios cardiovasculares. Entonces:

$$S = \{x + y \leq 60, x + y \geq 45, x - y \leq 0, x \geq 20, y \geq 0\},$$

con vértices $A = (20, 40)$, $B = (30, 30)$, $C = (20, 25)$ y $D = (22{,}5, 22{,}5)$.



La función objetivo es $B(x, y) = x + 2y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $B(20, 40) = 100 \rightarrow$ Máximo
- $B(30, 30) = 90$
- $B(20, 25) = 70$
- $B(22{,}5, 22{,}5) = 67{,}5 \rightarrow$ Mínimo

El máximo beneficio se obtiene dedicando 20 minutos a ejercicios de fuerza y 40 minutos a ejercicios cardiovasculares. El mínimo beneficio se obtiene dedicando 22,5 minutos a cada uno de los dos tipos de ejercicios.

B.3. *a*) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Asíntotas horizontales:
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a ∞.
- Asíntotas verticales:
  $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. En $x = 0$ tiene una asíntota vertical.

- Asíntotas oblicuas:
  $m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = 1, \quad n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{2}{x}-x\right) = 0.$
  Por lo tanto la función tiene una asíntota oblicua en $y = mx + n = x$.

b) Se calcula la derivada y se iguala a cero: $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} = 0$, entonces $x = \pm\sqrt{2}$. Mirando ahora el signo:
  - En $(-\infty, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)$ la derivada es positiva y por tanto la función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)$
  - En $(-\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2})$ la derivada es negativa y por tanto la función decrece en $(-\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2})$.

B.4. Definimos los sucesos $G =$'modalidad general', $J =$'modalidad jóvenes' y $S =$'investigador/a seleccionado/a'. Sabemos que $P(S \mid G) = 0{,}161$ y $P(S \mid J) = 0{,}211$. Calculamos:

$$P(G) = \frac{2159}{2159+1316} = 0{,}62 \text{ y } P(J) = \frac{1316}{3475} = 0{,}38.$$

a) Así:

$$P(S) = P(S \mid G)P(G) + P(S \mid J)P(J) = 0{,}161 \cdot 0{,}62 + 0{,}211 \cdot 0{,}38 = 0{,}18.$$

b) La probabilidad pedida es:

$$P(G \mid S) = \frac{P(S \mid G)P(G)}{P(S)} = \frac{0{,}161 \cdot 0{,}62}{0{,}18} = 0{,}56.$$

B.5. *a*) $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{20}} = 1{,}152 \Longrightarrow IC = (48{,}848; 51{,}152)$

b) $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1$, entonces, $\sqrt{n} > 1{,}645 \cdot \dfrac{2}{1} \Longrightarrow n = 11.$