A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x}$

a.2) (0.75 puntos) $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\displaystyle \int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

b.2) (0.75 puntos) $\displaystyle \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

Solución:

A.2.

a.1) Aplicando L'Hôpital dos veces: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-12x}{-4+\operatorname{sen} x} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

a.2) Haciendo el cambio de variable $t = 1/x$, de forma que cuando $x \to \infty$ entonces $t \to 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t\to 0} t\left(3t - \frac{2}{\operatorname{sen} t}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2 \operatorname{sen} t - 2t}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0} \frac{6t\operatorname{sen} t + 3t^2\cos t - 2}{\cos t} = \boxed{-2}$$

b.1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c}$

b.2) Calculamos primero la integral indefinida, integrando dos veces por partes:

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{array}\right\} = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{array}\right\} =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx = -(x^2+2x+2)e^{-x} + c$$

Aplicando la regla de Barrow: $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = -(1+2+2)e^{-1} + 0 + 0 + 2 = \boxed{-5e^{-1}+2}$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

B.2.

a) La función es continua en toda la recta real, por ser suma de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Respecto a la derivabilidad en 0,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x^2-1) = -1, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1$$

y por tanto f no es derivable en 0.
b) $f(0)$ es un máximo relativo. En efecto, para $x<0$ se tiene que $f(x)=x^3+x+2=(x^3+x)+2=(x^3+x)+f(0)$, y $x^3+x<0$. Si $x>0$ $f(x)=x^3-x+2=(x^3-x)+f(0)$ y $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)>0$ si $x\in(0,1)$. f es derivable en todo $x\neq 0$. Si $x<0$, $f'(x)=3x^2+1>0$, luego no puede ser un extremo relativo. Cuando $x>0$, $f'(x)=3x^2-1$ que se anula solo para $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, y como $f''(\frac{1}{\sqrt{3}})=2\sqrt{3}>0$ la función alcanza un mínimo local $f(\frac{1}{\sqrt{3}})=2-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en ese punto.
c) Observamos que si $x\geq 0$, $f(x)\geq f(\frac{1}{\sqrt{3}})>0$. Por otra parte, si $x\in[-1,0]$, $f(x)=x^3+x+2=(x+1)(x^2-x+2)\geq 0$. El área pedida es pues

$$\int_{-1}^{0}(x^3+x+2)dx+\int_{0}^{1}(x^3-x+2)dx = F(0)-F(-1)+G(1)-G(0)=3,$$

siendo $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+2x$ y $G(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+2x$ (regla de Barrow).