A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

Solución:

A.3.

a) Sea α el plano perpendicular a r que pasa por A. Su vector normal tiene la dirección de la recta r, $\overrightarrow{n_\alpha} = (1,1,2)$. El vector normal al plano π es $\overrightarrow{n_\pi} = (1,1,-1)$. Por tanto, el coseno del ángulo entre π y α es $\dfrac{|\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{n_\pi}| \cdot |\overrightarrow{n_\alpha}|} = 0$ y los dos planos son perpendiculares.

b) La recta r y el plano π son paralelos y en consecuencia, la distancia entre ellos es igual a la distancia entre un punto de la recta $P_r(1,-1,2)$ y el plano π. Por lo tanto, $d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|1-1-2-6|}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

c) Se comprueba que A no pertenece al plano π. El vector director de la recta s que buscamos es $\overrightarrow{d_s}$. $\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{n_\pi} = (-3,3,0) \parallel (-1,1,0)$. Por tanto una ecuación de la recta es $s \equiv \dfrac{x-1}{-1} = y = \dfrac{z+1}{0}$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

Solución:

B.3.

a) La recta r pasa por $P(2,-1,-4)$ y tiene vector director $\vec{u}=(1,1,-3)$. La recta s pasa por $Q(1,5,1)$ y tiene vector director $\vec{v}=(1,0,1)\times(-2,1,-2)=(-1,0,1)$. La perpendicular común a r y s es la intersección del plano π que pasa por P y tiene vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,1,-3)\times(-1,0,1)=(1,2,1)$ y el plano τ que pasa por Q y tiene vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Las ecuaciones de π y τ son

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7x-4y+z-14=0, \quad \tau \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(x-y+z+3)=0$$

y por tanto la perpendicular común es $\left\{\begin{array}{l} 7x-4y+z-14=0 \\ x-y+z+3=0 \end{array}\right.$.

b) La distancia entre ambas rectas puede calcularse, por ejemplo, como el módulo de la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre la dirección de la perpendicular común a ambas rectas, $\vec{w}$. Dicha proyección es $\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$. Su módulo es:

$$|(-1,6,5)\cdot(1,2,1)|\frac{\|(1,2,1)\|}{\|(1,2,1)\|^2}=\frac{16}{\sqrt{6}}\approx 6.532.$$