A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} & x < 0 \\ \\ x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \end{cases}.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución:

A.2.

a) $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (propiedades de las funciones continuas).
$\lim_{x \to 0^-} \frac{2x+1}{x} = -\infty$ Por tanto, $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ y la función no es continua en $x = 0$.
b) $f(x)$ no es derivable en $x = 0$ por no ser continua en este punto.
c) $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$; no tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.
$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$; la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
$\lim_{x \to 0^-} \frac{2x+1}{x} = -\infty$; la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.
d) $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. En el punto $(2, f(2)) = (2, -1)$ la recta tangente es horizontal. Su ecuación es $y + 1 = 0$.
$f'(x) < 0$ en $(0, 2)$ y $f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$; entonces, en $(2, -1)$ la función presenta un mínimo relativo.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

Solución:

B.2.

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = 0$, donde se ha aplicado la regla de L'Hôpital. Por otro lado, $\lim_{x\to 0^-} x = 0$. Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 0$ ya que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Como $f'(x) = \ln(x) + 1$ si $x > 0$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, lo que implica que $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.
b) $f'(x) = 1 > 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$. En dicho intervalo, la función es creciente.
$f'(x) = \ln(x) + 1$ en $(0, +\infty)$. Como además $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(0, e^{-1})$ y por tanto en este intervalo $f(x)$ es decreciente y $f'(x) > 0$ en el intervalo $(e^{-1}, +\infty)$ y por tanto en este intervalo $f(x)$ es creciente. De ello se deduce que $f(x)$ alcanza un mínimo relativo en $x = e^{-1}$ y un máximo relativo en $x = 0$.

c) Integrando por partes nos queda que $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.