A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ pertenecientes al plano π.

a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

Solución:

A.3.

a) Como el cuadrado está sobre el plano π y los puntos A y B están sobre el eje y, los puntos C y D tienen que tener la siguiente forma $(a,1,a)$ y $(a,-1,a)$ respectivamente. Además, como $d(A,D)=d(B,C)=2$, entonces $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$. Por lo que $D(\sqrt{2},-1,\sqrt{2})$ y $C(\sqrt{2},1,\sqrt{2})$ o $D(-\sqrt{2},-1,-\sqrt{2})$ y $C(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2})$.

b) Denotemos por C y D los vértices que se piden. Los puntos C y D están contenidos en la recta r_1, que pasa por el punto $O(0,0,0)$, el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta r que pasa por A y B. Sean $\vec{v}=(0,1,0)$ y $\vec{v_1}=(a,b,c)$ los vectores directores de r y r_1, respectivamente. Como todos los puntos pertenecen a π, $a=c$; como $\vec{v}$ y $\vec{v_1}$ tienen que ser perpendiculares, $\vec{v}\cdot\vec{v_1}=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \vec{v_1}=(a,0,a)$, tomando $\vec{v_1}=(1,0,1)$ tenemos $r_1 \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0, \ \lambda\in\mathbb{R}. \\ z=\lambda \end{cases}$ Puesto que la distancia entre O y A tiene que ser la misma que entre O y C (igual que entre O y D) que, además, es igual a 1, se tiene que $|(\lambda,0,\lambda)-(0,0,0)|=\sqrt{2\lambda^2}=|\lambda|\sqrt{2}=1 \Rightarrow \lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $\lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, siendo los vértices $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t, \\ z=t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.

b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z=0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Solución:

B.3.

a) Las rectas r y s son paralelas. La distancia entre las rectas r y s se puede calcular como la distancia de un punto cualquiera de r a la recta s.
Sean $A(-1,-1,0) \in r$, $B(2,5,0) \in s$, el vector $|\overrightarrow{AB}| = (3,6,0)$ y el vector director de la recta s, $\vec{v} = (-2,2,1)$.
La distancia de A a s viene dada por $d(A,s) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{\sqrt{369}}{3} = \sqrt{41}\,\text{u}.$
b) El plano π viene determinado por un punto de la recta r, y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}$. Una ecuación del mismo es $2x - y + 6z + 1 = 0$.
c) Los puntos P y Q son los puntos de las rectas r y s cuya coordenada z es 0; estos son, $P(-1,-1,0) \in r$, $Q(2,5,0) \in s$. Unas ecuaciones paramétricas de la recta pedida son: $(x,y,z) = (2+3t, 5+6t, 0),\ t \in \mathbb{R}$.