A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \dfrac{5v}{3} & \text{si} \quad 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} & \text{si} \quad v \geq 3. \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Solución:

A.2.

a) Dado que $v > 3$ basta deteminar el mínimo cuando $c(v) = 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3}$. Este se alcanza cuando $v = 6$ decenas de kilometros por hora.
b) La función $c(v)$ es continua para $v \geq 0$ pero no es derivable en $v = 3$. Para determinar los valores máximos y mínimos del consumo, podemos utilizar el Teorema de Weierstrass (al ser $c(v)$ una función continua en un intervalo cerrado y acotado). Por tanto, los valores extremos debemos elegirlos de entre $\{c(1) = 5/3, c(3) = 5, c(6) = 2, c(8) = 10/3\}$. Así pues, los consumos mínimo y máximo son, respectivamente: $5/3$ l/100km y 5 l/100km.
Alternativamente, puede estudiarse el crecimiento y decrecimiento de c en el intervalo $[1, 8]$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = \left|f(x)\right|$.

b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

B.2.

a) La gráfica de la función $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ es una parábola invertida, con valor $f(0) = 2 > 0$, luego se anula en dos valores digamos $a < 0$, $b > 0$. Así la función $h(x)$ será $f(x)$ si $x \in (a, b)$ y $-f(x)$ en otro caso. Por ser ambas expresiones polinómicas, la función $h(x)$ es derivable en todos los puntos salvo quizás en los puntos críticos $x = a$ o $x = b$. Para ser derivable en estos valores ha de ocurrir que coincidan las derivadas de $f(x)$ y $-f(x)$ en ellos. Se tiene que $f'(x) = 2 - 4x$ y $(-f(x))' = -(f'(x)) = 4x - 2$ solo coinciden si $x = \frac{1}{2}$. Como $f(1/2) = 2 + 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} \neq 0$ se deduce que la función $h(x) = |f(x)|$ es derivable en todos los puntos salvo en las dos raíces de $2 + 2x - 2x^2$ que son $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

b) La función diferencia $f(x) - g(x)$ es $2 + 2x - 2x^2 - (2 - 6x + 4x^2 + 2x^3) = 2x(x+4)(1-x)$, que es positiva en $(0, 1)$ y negativa en $(1, 2)$. Así

$$\int_0^2 \big|(f(x) - g(x)\big| dx = \int_0^1 (8x - 6x^2 - 2x^3)\, dx + \int_1^2 (2x^3 + 6x^2 - 8x)\, dx = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = 11.$$