A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Solución:

A.3.

a) Como la última componente de los puntos P y Q es 1, los dos puntos pertenecen al plano $z = 1$.
b) La recta buscada tendrá como vector director el mismo de la recta r, $v = (1, 1, 0)$ y como está sobre el plano $z = 0$ pasará por el punto $(0, 0, 0)$, por lo que su ecuación será $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}$.
c) La recta r es $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$. La recta buscada, s, está contenida en el plano que tiene vector normal $n = (1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0)$, $y = x$, por tanto su vector director es $v = (1, 1, v_3)$. Como $\frac{\pi}{4}$ es el ángulo que forman r y s se tiene que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|(1,1,v_3)\cdot(1,1,0)|}{|(1,1,v_3)||(1,1,0)|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+v_3^2}} \Rightarrow \sqrt{2+v_3^2} = 2 \Rightarrow v_3 = \pm\sqrt{2}.$$

Por tanto la recta buscada podría ser $s \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \sqrt{2}\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$ o $s \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 - \sqrt{2}\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Solución:

B.3.

a) El punto pedido es el pie de la recta s perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas. Así,

$$\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{n_\pi} = (1,3,2) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sea $\{P\} = s \cap \pi$. Como $\lambda + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P(-1,-3,-2)$.

b) La proyección buscada es $p \equiv \begin{cases} \pi : x + 3y + 2z & = -14 \\ \pi' : 3x - y & = 0 \end{cases}$, siendo π' el plano ortogonal a π que contiene al eje $OZ \Rightarrow \overrightarrow{n_{\pi'}} = \overrightarrow{n_\pi} \times \overrightarrow{d_{OZ}} = (3,-1,0)$.

c) Sea t la recta que buscamos. Como $\left.\begin{array}{l} t \perp r \Rightarrow \overrightarrow{d_t} \perp \overrightarrow{d_r} \\ t \subset \pi \Rightarrow \overrightarrow{d_t} \perp \overrightarrow{n_\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{n_\pi} = (2,0,-1)$.

Como además $t \subset \pi$ y corta al eje $OZ \Rightarrow t$ pasa por el punto $\{Q\} = OZ \cap \pi \Rightarrow Q(0,0,-7)$:

$$t \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -7 - \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$