A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.

b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

Solución:

A.1.

a) Se tiene
$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^tA| = 0.$$

b) $BA = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$. El menor de las dos últimas columnas es $2b^2$, por lo que si $b \neq 0$ entonces el rango de BA es 2. Por otra parte, si $b = 0$ entonces la primera fila se anula y la segunda no, por lo que el rango es 1.

c) Para $b = 2$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

d) Para $b = 1$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^5 = (B^2)^2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + kz &= 1 \\ kx - y - z &= 0 \\ -y + (k-1)z &= 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

Solución:

B.1.

a) Sea A la matriz de los coeficientes y A' la matriz ampliada, $|A| = 3k - 2k^2$, que se anula para $k = 0, k = 3/2$.
Para $k \neq 0$ y $k \neq 3/2 \Rightarrow \text{rango}A = \text{rango}A' = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Para $k = 0 \Rightarrow \text{rango}A = 2 \neq \text{rango}A' = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
Para $k = 3/2 \Rightarrow \text{rango}A = \text{rango}A' = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
b) Para $k = 3$ se tiene que la solución es $x = -1/3, y = -5/3, z = 2/3$.
c) Para $k = 3/2$ la solución es $x = \lambda, \quad y = (1/2)\lambda - 2, \quad z = 2 + \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Si queremos que $x = 2$, tomamos $\lambda = 2$ y obtenemos la solución particular $x = 2, y = -1, z = 4$.