MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) 0.25 puntos por obtener la matriz y 0.25 puntos por calcular el determinante.
b) 0.25 puntos por obtener la matriz y 0.25 puntos por calcular el rango.
c) Planteamiento: 0.5 puntos, resolución 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.5 puntos, resolución 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.

A.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Identificación de $c(v = 3)$ como posible extremo: 0.5 puntos. Identificación, como posibles extremos, de $c(v = 1), c(v = 8)$ y $c(v = 6)$: 0.75 puntos (0.25 por cada uno de ellos). Cálculo de los consumos pedidos: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.

A.3.

a) Verificación 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

A.4.

a) Planteamiento de cada probabilidad: 0.5 puntos. Resolución de cada probabilidad: 0.25 puntos.
b) Planteamiento de cada probabilidad: 0.25 puntos. Resolución de cada probabilidad: 0.25 puntos. Se considerará correcto el cálculo de $P(A \cap B|A \cup B)$ a partir de un valor incorrecto de $P(A \cap B)$ procedente del apartado anterior.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

a) Cálculo de los valores a estudiar: 0.5 puntos (0.25 puntos por el planteamiento y 0.25 puntos por la solución). Discusión del sistema: 0.75 puntos (0.25 puntos por cada uno de los tres casos).
b) 0.25 puntos por el planteamiento y 0.25 puntos por la solución.
c) 0.5 puntos por la solución paramétrica del sistema y 0.25 puntos por la solución particular.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

B.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

B.3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Hallar la proyección: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo del vector director: 0.25 puntos. Solución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

B.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento correcto de la distribución normal: 0.5 puntos. Cálculo de la probabilidad: 0.5 puntos. Una corrección por continuidad ausente o defectuosa se penalizará con 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) Se tiene

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^tA| = 0.$$

b) $BA = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$. El menor de las dos últimas columnas es $2b^2$, por lo que si $b \neq 0$ entonces el rango de BA es 2. Por otra parte, si $b = 0$ entonces la primera fila se anula y la segunda no, por lo que el rango es 1.
c) Para $b = 2$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.
d) Para $b = 1$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^5 = (B^2)^2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

A.2.

a) Dado que $v > 3$ basta deteminar el mínimo cuando $c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}$. Este se alcanza cuando $v = 6$ decenas de kilometros por hora.
b) La función $c(v)$ es continua para $v \geq 0$ pero no es derivable en $v = 3$. Para determinar los valores máximos y mínimos del consumo, podemos utilizar el Teorema de Weierstrass (al ser $c(v)$ una función continua en un intervalo cerrado y acotado). Por tanto, los valores extremos debemos elegirlos de entre $\{c(1) = 5/3, c(3) = 5, c(6) = 2, c(8) = 10/3\}$. Así pues, los consumos mínimo y máximo son, respectivamente: $5/3$ l/100km y 5 l/100km.
Alternativamente, puede estudiarse el crecimiento y decrecimiento de c en el intervalo $[1, 8]$.

A.3.

a) Como la última componente de los puntos P y Q es 1, los dos puntos pertenecen al plano $z = 1$.
b) La recta buscada tendrá como vector director el mismo de la recta r, $v = (1, 1, 0)$ y como está sobre el plano $z = 0$ pasará por el punto $(0, 0, 0)$, por lo que su ecuación será $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}$.
c) La recta r es $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$. La recta buscada, s, está contenida en el plano que tiene vector normal $n = (1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0)$, $y = x$, por tanto su vector director es $v = (1, 1, v_3)$. Como $\frac{\pi}{4}$ es el ángulo que forman r y s se tiene que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|(1, 1, v_3) \cdot (1, 1, 0)|}{|(1, 1, v_3)||(1, 1, 0)|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2 + v_3^2}} \Rightarrow \sqrt{2 + v_3^2} = 2 \Rightarrow v_3 = \pm\sqrt{2}.$$

Por tanto la recta buscada podría ser $s \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \sqrt{2}\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$ o $s \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 - \sqrt{2}\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

A.4.

a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.625P(B)$. Además $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, por lo que $0.65 = 0.5 + P(B) - 0.625P(B) \Rightarrow 0.15 = 0.375P(B) \Rightarrow P(B) = 0.4$ y $P(A \cap B) = 0.625 \cdot 0.4 = 0.25$.

b) $P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{0.65} = \frac{0.5}{0.65} = \frac{10}{13}$.
$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.25}{0.65} = \frac{5}{13}$.

B.1.

a) Sea A la matriz de los coeficientes y A' la matriz ampliada, $|A| = 3k - 2k^2$, que se anula para $k = 0, k = 3/2$.
Para $k \neq 0$ y $k \neq 3/2 \Rightarrow \text{rango}A = \text{rango}A' = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Para $k = 0 \Rightarrow \text{rango}A = 2 \neq \text{rango}A' = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
Para $k = 3/2 \Rightarrow \text{rango}A = \text{rango}A' = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
b) Para $k = 3$ se tiene que la solución es $x = -1/3, y = -5/3, z = 2/3$.
c) Para $k = 3/2$ la solución es $x = \lambda, \quad y = (1/2)\lambda - 2, \quad z = 2 + \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Si queremos que $x = 2$, tomamos $\lambda = 2$ y obtenemos la solución particular $x = 2, y = -1, z = 4$.

B.2.

a) La gráfica de la función $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ es una parábola invertida, con valor $f(0) = 2 > 0$, luego se anula en dos valores digamos $a < 0$, $b > 0$. Así la función $h(x)$ será $f(x)$ si $x \in (a, b)$ y $-f(x)$ en otro caso. Por ser ambas expresiones polinómicas, la función $h(x)$ es derivable en todos los puntos salvo quizás en los puntos críticos $x = a$ o $x = b$. Para ser derivable en estos valores ha de ocurrir que coincidan las derivadas de $f(x)$ y $-f(x)$ en ellos. Se tiene que $f'(x) = 2 - 4x$ y $(-f(x))' = -(f'(x)) = 4x - 2$ solo coinciden si $x = \frac{1}{2}$. Como $f(1/2) = 2 + 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} \neq 0$ se deduce que la función $h(x) = |f(x)|$ es derivable en todos los puntos salvo en las dos raíces de $2 + 2x - 2x^2$ que son $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

b) La función diferencia $f(x) - g(x)$ es $2 + 2x - 2x^2 - (2 - 6x + 4x^2 + 2x^3) = 2x(x + 4)(1 - x)$, que es positiva en $(0, 1)$ y negativa en $(1, 2)$. Así

$$\int_0^2 \big|(f(x) - g(x)\big| dx = \int_0^1 (8x - 6x^2 - 2x^3)\, dx + \int_1^2 (2x^3 + 6x^2 - 8x)\, dx = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = 11.$$

B.3.

a) El punto pedido es el pie de la recta s perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas. Así,

$$\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{n_\pi} = (1, 3, 2) \Rightarrow s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right. ,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sea $\{P\} = s \cap \pi$. Como $\lambda + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P(-1, -3, -2)$.

b) La proyección buscada es $p \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \pi : x + 3y + 2z & = -14 \\ \pi' : 3x - y & = 0 \end{array} \right.$, siendo π' el plano ortogonal a π que contiene al eje $OZ \Rightarrow \overrightarrow{n_{\pi'}} = \overrightarrow{n_\pi} \times \overrightarrow{d_{OZ}} = (3, -1, 0)$.
c) Sea t la recta que buscamos. Como $\left. \begin{array}{l} t \perp r \Rightarrow \overrightarrow{d_t} \perp \overrightarrow{d_r} \\ t \subset \pi \Rightarrow \overrightarrow{d_t} \perp \overrightarrow{n_\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{n_\pi} = (2, 0, -1)$.
Como además $t \subset \pi$ y corta al eje $OZ \Rightarrow t$ pasa por el punto $\{Q\} = OZ \cap \pi \Rightarrow Q(0, 0, -7)$:

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -7 - \lambda \end{array} \right. ,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

B.4.

a) $X =$ "número de universitarios, de entre 10, que aprueban a la primera el examen práctico del carnet de conducir" $\sim B(10; 0.65)$.

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} 0.65^7 \cdot (1 - 0.65)^3 \approx 0.252.$$

b) $1 - P(X = 10) = 1 - 0.65^{10} \approx 0.987$.
c) Tenemos que $p = 0.65$, $q = 0.35$ y $n = 60$. Sea $Y \sim B(60; 0.65)$. Y se puede aproximar por $Y' \sim N(np; \sqrt{npq}) = N(39; 3.69)$,

$$P(Y \geqslant 30) \approx P(Y' \geqslant 29.5) = P(Z \geqslant -2.57) = P(Z \leqslant 2.57) = 0.9949.$$