Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$, $m_2 = 0.94$, $m_3 = 0.89$, $m_4 = 0.90$, $m_5 = 0.91$.

Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano.

Soluciones:

a) $E'(x) = 2[5x - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)] = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{5} = \dfrac{4,56}{5} = 0,912$, es decir, se trata de la media de resultados. Sólo queda por comprobar que se trata de un mínimo:
$E''(x) = 10 \Longrightarrow E''(0,912) = 10 > 0 \Longrightarrow x = 0,912$ es un mínimo.
Éste valor correspondería a un error de $E(0,912) = 0,00148$.

b)

$$F(x) = \int x^2 \ln(x)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx \Longrightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] =$$

$$\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3(3\ln x - 1)}{9}$$

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx = F(2) - F(1) = \frac{24\ln 2 - 7}{9} \simeq 1,07\ u^2$$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.
b) (0.75 puntos) Calcular $f'(4)$.
c) (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Soluciones:

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \end{cases} \Longrightarrow y = 1.$$

b) $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(4) = \frac{9}{125} = 0,072.$$

c) La función corta al eje OX en $x = 0$ por lo que tendremos dos recintos de integración uno para cada una de las ramas: $S_1 : [-1, 0]$ y $S_2 : [0, 1]$.

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = \left[\begin{array}{c} x^2+9=t \\ 2xdx = dt \end{array} \right] = \int t^{-1/2}\, dt = t^{1/2} = \sqrt{x^2+9}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = -\sqrt{x^2+9}\Big]_{-1}^{0} = \sqrt{10} - 3 \simeq 0,162$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = \sqrt{x^2+9}\Big]_{0}^{1} = \sqrt{10} - 3 \simeq 0,162$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2\sqrt{10} - 6 \simeq 0,325$$