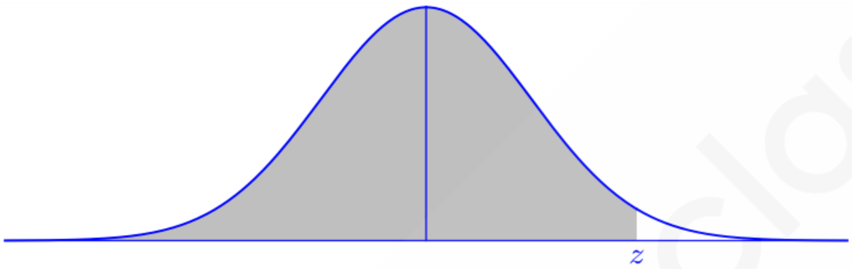
A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Solución:

A.4.

a) T ="tiempo de vida (en meses) de un individuo de esta especie tomado al azar"$\sim$ Normal$(\mu = 8.8, \sigma = 3)$. Con Z la distribución Normal$(0, 1)$:

$$P(T > 10) = P(Z > 0.40) \approx 0.3446 \Rightarrow \text{Un } 34.46 \text{ \% de los individuos.}$$

$$P(7 < T < 10) = P(-0.60 < Z < 0.40) \approx 0.6554 - 0.2743 = 0.3811 \Rightarrow \text{Un 38.11 \% de los individuos.}$$

b) Elegido al azar un individuo de esta especie $p = P(T \leq 10) \approx 0.6554$. Tomados 4 individuos al azar, sus tiempos de vida serán independientes y así la variable X que contabiliza cuántos de estos 4 no han superado los 10 meses de vida es una Binomial$(4, p = 0.6554)$. Se pide

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.6554)^4 = 1 - 0.3446^4 \approx 0.985898637.$$

c) $P(8.8 - c \leq T \leq 8.8 + c) = 0.98 \Leftrightarrow P\big(0 \leq Z \leq \frac{c}{3}\big) = 0.49$. De la tabla de la Normal$(0, 1)$ se tiene $\frac{c}{3} \approx 2.33$ y así $c \approx 6.99$ es el valor buscado.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de NO_2” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?

d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución:

B.4.

a) Sean los sucesos N ="en un día se supera el nivel permitido de $\mathrm{NO_2}$" y P ="en un día se supera el nivel permitido de partículas". Se sabe que $P(N) = 0.16$, $P(P|N) = 0.33$ y $P(P|\overline{N}) = 0.08$. Entonces $P(N \cap P) = P(P|N) \cdot P(N) = 0.33 \cdot 0.16 = 0.0528$.
b) $P(P) = P(P|N)P(N) + P(P|\overline{N}) \cdot P(\overline{N}) = 0.0528 + 0.08 \cdot (1 - 0.16) = 0.12$.
$P(P \cup N) = P(P) + P(N) - P(P \cap N) = 0.12 + 0.16 - 0.0528 = 0.2272$.
c) P y N no son independientes, ya que $P(P \cap N) = 0.0528$ y $P(P) \cdot P(N) = 0.12 \cdot 0.16 = 0.0192$ no coinciden.
d) $P(N|\overline{P}) = \dfrac{P(N \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{P(N) - P(N \cap P)}{1 - P(P)} = \dfrac{0.16 - 0.0528}{1 - 0.12} \approx 0.1218.$