A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

A.3.

a) La recta r está en forma implícita y su vector director es $\overrightarrow{d_r} = (2,-1,1)$. El vector normal al plano π es $\overrightarrow{n} = (2,1,-1)$ y por tanto el seno del ángulo α que forman es $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{d_r}||\overrightarrow{n}|} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{3}) \approx 19.47°$.

b) La recta r es $(x,y,z) = (1,-1,0) + \lambda(2,-1,1)$. El punto P de intersección entre la recta y el plano se obtiene para λ solución de $2(1+2\lambda) + (-1-\lambda) - \lambda + 3 = 0$, es decir, $\lambda = -2 \Rightarrow P(-3,1,-2)$. La recta s que pasa por P y es perpendicular al plano $z - y = 0$, tiene por ecuaciones paramétricas $s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$. La recta s y el plano $z - y = 0$ se cortan en el punto $M(-3, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$, que es el punto medio de PP'. Por tanto $P'(-3,-2,1)$.

c) El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π es: $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + z + 1 = 0$ y por tanto la recta proyección de r sobre π tiene por ecuación $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

Solución:

B.3.

a) Los planos que son paralelos a $x + y = 1$ son de la forma $x + y = D$, la distancia del origen a un plano que cumpla la ecuación anterior será $\frac{|D|}{\sqrt{2}} = 2$, esto implica que $D = \pm 2\sqrt{2}$. Por tanto los planos son $x + y = 2\sqrt{2}$ y $x + y = -2\sqrt{2}$.
b) Una recta perpendicular al plano $x + z = 1$ tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$ y si corta al eje y en $y = 2$ pasa por el punto $(0, 2, 0)$. Por tanto la ecuación de la recta será $(x, y, z) = (\lambda, 2, \lambda)$.
c) Los puntos de intersección con los ejes x e y son los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ respectivamente. La distancia entre ellos es $\sqrt{2}$.