A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0.5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\, dx$.

Solución:

A.2.

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$, por lo que la función es continua en $x = 0$.

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^3 e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 e^{-1/h^2} = 0$, por lo que la función es derivable en $x = 0$.

b) $f(-x) = -x^3 e^{-1/x^2} = -f(x)$. Por tanto, la función presenta simetría impar.

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\,dx = \int_1^2 \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \left(\frac{1}{2}e^{-1/x^2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(e^{-1/4} - e^{-1}\right).$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) (0.5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

B.2.

a) $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$ (propiedades de las funciones continuas), $f(-1) = -\dfrac{1}{2} < 0,\ f(1) = \dfrac{1}{2} > 0.$ Sí verifica las hipótesis.

b) $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x = \pm 1$. La función alcanza un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1}dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}dx = \big(\ln(x^2+1)\big)\Big|_0^1 = \ln 2\,\mathrm{u}^2.$