**A.3. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{array} \right.$.

a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de $r$ y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta $r$.

# Solución:

**A.3.**

**a)** Un vector director de la recta es $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)$ y las coordenadas del punto de incidencia son $(-90, -190, 0)$.
**b)** El punto $Q$ buscado viene dado por la intersección de la trayectoria con el plano $\pi$ perpendicular a la misma que pasa por $P$; como $\pi \equiv x + 2y + z - 4 = 0$, se tiene que $Q\,(-11, -32, 79)$.
**c)** Un vector normal al plano dado es $\overrightarrow{v} = (1, 1, 0)$. Como $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3$, se tiene que

$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{3}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, el ángulo pedido es $\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ radianes.

**B.3. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv x+y+z=1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0,1,0)$.

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta $r_1$ está contenida en el plano $\pi$ y que el punto $P$ pertenece al mismo plano.

b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano $\pi$ que pase por $P$ y sea perpendicular a $r_1$.

c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, $r_2$, que pase por $P$ y sea paralela a $r_1$. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas $r_1$ y $r_2$.

## Solución:

**B.3.**

**a)** Sustituyendo la expresión de la recta $r_1$ en la ecuación del plano $\pi$ nos queda $1+\lambda+1-\lambda-1=1$, y sustituyendo el punto $P$ en $\pi$ tenemos la identidad $0+1+0=1$. Por tanto, se verifica que la recta $r_1$ está contenida en el plano y que el punto $P$ pertenece al mismo.
**b)** La recta buscada será la intersección del plano $\pi$ con el plano que tenga como vector normal al vector director de la recta $r_1$ y pase por $P$. Por lo tanto, sustituyendo $P$ en $x-y=D$ nos queda $D=-1$. Con esto tenemos la ecuación de la recta buscada en forma implícita: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y=-1 \end{array}\right.$.
**c)** Si $r_2$ y $r_1$ son paralelas tendrán el mismo vector director $\vec{v}=(1,-1,0)$ y como pasa por el punto $P$, una ecuación de $r_2$ será $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1-\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z=0 \end{array}\right.$
La longitud de los lados del cuadrado se puede hallar calculando la distancia de $P$ a $r_1$. El punto intersección de $r_1$ con el plano $x-y=-1$ es $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$ y, $d(P, r_1)=\sqrt{\frac{3}{2}}$. El área pedida es $A=\frac{3}{2}\,\mathrm{u}^2$.