A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C \mid A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A} \mid D) = 0.2$ y $P(D \mid A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

Solución:

A.4.

a) Usando que A y B son independientes se tiene

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.3 + 0.5 - (0.3 \cdot 0.5) = 0.65.$$

b) Como $P(C \mid A) = P(A \cap C)/P(A) = 0.5$, se tiene que $P(A \cap C) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$. En consecuencia

$$P(A \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap C) = 0.3 - 0.15 = 0.15.$$

c) Como $P(\overline{A} \mid D) = 0.2$, tenemos que $P(A \mid D) = 1 - P(\overline{A} \mid D) = 0.8$. Por tanto,

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)} \Rightarrow P(D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(A \mid D)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.8} = 0.1875.$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

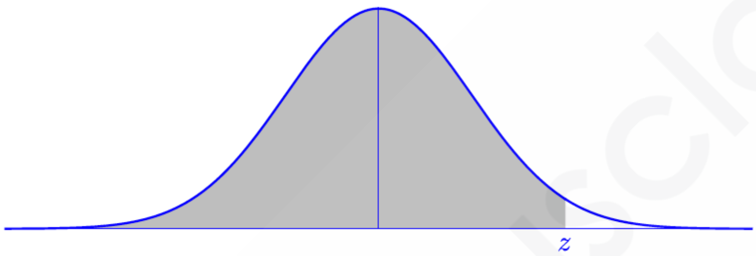
La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el $18\,\%$ de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Solución:

B.4.

a) Si X es la variable "longitud de la sardina en mm", nos piden $P(X > 160)$ que calculamos tipificando a la normal Z de media 0 y desviación típica 1:

$$P(X > 160) = P\Big(Z > \frac{160 - 175}{25.75}\Big) = P(Z > -0.58) \approx 0.7190.$$

Así, aproximadamente un $72\,\%$ de la captura serán de la calidad exigida.

b) Hemos de buscar $t < 175$ mm tal que $P(t < X < 175) = 0.18$, es decir $P\Big(\frac{t-175}{25.75} < Z < 0\Big) = 0.18$. De la tabla de la normal vemos que $\frac{t-175}{25.75} \approx -0.47$ de donde $t \approx 163$ mm.

c) La variable $T =$ "número de sardinas de longitud menor que 15 cm en cada caja de 10" sigue una distribución binomial $B(n = 10, p)$ con

$$p = P(X < 150) = P(Z < (150 - 175)/25.75) \approx P(Z < -0.97) \approx 0.1660.$$

La probabilidad pedida es $P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0) = 1 - (1 - p)^{10} = 0.8372.$