A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Solución:

A.2.

a) Como $f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = f(x)$, f es par.

b) Como $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-1}} = +\infty$, f no es derivable en $x=1$. (También se puede razonar, por ejemplo, que $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \infty$).

c) $f'(x) = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Por tanto, la función f es creciente en los intervalos $(1,\infty)$ y $(-1,0)$, y decreciente en $(0,1)$ y $(-\infty,-1)$. Por tanto, en los puntos $x=-1$ y $x=1$ la función f alcanza un mínimo relativo y en $x=0$ un máximo relativo. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ la función no puede tener un máximo absoluto y como $f(x)\geq 0$ y $f(1)=f(-1)=0$, entonces $x=1$ y $x=-1$ serán puntos de mínimos absolutos.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Solución:

B.2.

a) El dominio de f es $\mathbb{R}-\{1\}$, por lo que si $x \neq \pm 1$, la función es continua por estar formada por funciones elementales. Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=-1$. En $x=1$ f no está definida y por tanto no es continua.

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = [1^{-\infty}] = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{x^2}{2+x^2}-1\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{\frac{2+x^2}{-2}\cdot\frac{-4x^2+2}{2+x^2}} = e^{-4}.$

c) $\int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3-3x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(\frac{-2}{3}x-\frac{2}{3}+\frac{2}{3-3x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{-x^2}{3}-\frac{2x}{3}-\frac{2}{3}\ln|1-x|\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{-1}{3}+\frac{2}{3}\ln 2.$