A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z=1$.

c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Solución:

A.3.

a) Consideremos los vectores $v_1 = B - A = (-1, 4, -4), v_2 = C - A = (1, 3, -3)$. Se tiene que v_1 y v_2 son linealmente independientes pues, por ejemplo, el menor formado por sus dos primeras componentes es no nulo. De este modo, los puntos A, B, C forman un triángulo y están, por tanto, contenidos en un único plano. Una ecuación de este plano es $\pi : -y - z + 1 = 0$.
b) La recta pedida tiene por punto base A y vector director v_1, luego está dada por

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Al cortar con el plano $z = 1$ se obtiene $\lambda = 1/2$. En consecuencia, el punto pedido es $(1/2, 0, 1)$.
c) Calculamos el vector $v_3 = C - B = (2, -1, 1)$. Así, el perímetro buscado es

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} + \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} + \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} \approx 12.55.$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Solución:

B.3.

a) Unas ecuaciones de r son $\left\{ \begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2y+z=-1 \end{array} \right.$. Al cortar con $\pi : x - z = 2$ se obtiene $(1,0,-1)$, así que r y π se cortan en ese punto.
b) La proyección ortogonal del punto A sobre el plano π es la intersección de π con la recta ortogonal a π por A. Como el vector normal a π es $(1,0,-1)$, dicha recta es $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$. Por tanto la proyección es el punto $A'(2,1,0)$.
c) La proyección ortogonal O de A sobre r, es el corte de r con el plano normal a r que pasa por A. Dicho plano tiene por vector normal al vector director de r, $(2,1,-2)$. Por tanto, el plano tiene ecuación $2x+y-2z=1$. Al cortarlo con $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2y+z=-1 \end{array} \right.$ obtenemos $O(1/3,-1/3,-1/3)$. Puesto que el punto simétrico A'' verifica que $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA''}$, tenemos que $A'' = A + 2\overrightarrow{AO} = (1,1,1) + 2\left(\frac{1}{3}-1, -\frac{1}{3}-1, -\frac{1}{3}-1\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.