MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 0.75 puntos. Cálculo correcto de las toneladas de tierra transportadas por cada tipo de camión: 0.25 puntos (en total). En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A.2.

a) Solución correcta: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Derivación correcta: 0.5 puntos. Extremos relativos: 0.5 puntos. Extremos absolutos: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Comprobación del triángulo: 0.25 puntos. Ecuación del plano: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Aplicación de la regla de Bayes: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.

B.1.

a) Cálculo correcto de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Discusión correcta del sistema: 0.75 puntos (0.25 puntos por cada uno de los tres casos).
b) Planteamiento correcto: 0.25 puntos. Resolución correcta del sistema: 0.25 puntos.
c) Por cada incógnita bien calculada: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente y interpreta los resultados obtenidos. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

B.2.

a) Continuidad en el punto $x = -1$: 0.5 puntos. No continuidad en el punto $x = 1$: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B.3.

a) Posición relativa: 0.25 puntos. Hallar el punto: 0.5 puntos.
b) Planteamiento correcto: 0.5 puntos. Solución correcta: 0.25 puntos.
c) Planteamiento correcto: 0.5 puntos. Hallar el punto medio: 0.25 puntos. Hallar el punto simétrico: 0.25 puntos

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus diferentes formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

B.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

Sea $x =$ nº de camiones tipo A, $y =$ nº de camiones tipo B, $z =$ nº de camiones tipo C. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x+1=y+z \\ \dfrac{10}{100}\cdot 24y=\dfrac{1}{7}\cdot 28z \\ 14x+24y+28z=302 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{array}\right\} \Rightarrow x=7,\, y=5,\, z=3$$

Luego los 7 camiones de tipo A transportan 98 toneladas de tierra, los 5 camiones tipo B transportan 120 toneladas de tierra y los 3 camiones de tipo C transportan 84 toneladas de tierra.

A.2.

a) Como $f(-x)=\sqrt[3]{((-x)^2-1)^2}=f(x)$, f es par.
b) Como $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-1}}=+\infty$, f no es derivable en $x=1$. (También se puede razonar, por ejemplo, que $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4}{3}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=\infty$).
c) $f'(x)=\dfrac{4}{3}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Por tanto, la función f es creciente en los intervalos $(1,\infty)$ y $(-1,0)$, y decreciente en $(0,1)$ y $(-\infty,-1)$. Por tanto, en los puntos $x=-1$ y $x=1$ la función f alcanza un mínimo relativo y en $x=0$ un máximo relativo. Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ la función no puede tener un máximo absoluto y como $f(x)\geq 0$ y $f(1)=f(-1)=0$, entonces $x=1$ y $x=-1$ serán puntos de mínimos absolutos.

A.3.

a) Consideremos los vectores $v_1=B-A=(-1,4,-4), v_2=C-A=(1,3,-3)$. Se tiene que v_1 y v_2 son linealmente independientes pues, por ejemplo, el menor formado por sus dos primeras componentes es no nulo. De este modo, los puntos A,B,C forman un triángulo y están, por tanto, contenidos en un único plano. Una ecuación de este plano es $\pi: -y-z+1=0$.
b) La recta pedida tiene por punto base A y vector director v_1, luego está dada por

$$\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=-2+4\lambda \\ z=3-4\lambda \end{array}\right. ,\lambda\in\mathbb{R}.$$

Al cortar con el plano $z=1$ se obtiene $\lambda=1/2$. En consecuencia, el punto pedido es $(1/2,0,1)$.
c) Calculamos el vector $v_3=C-B=(2,-1,1)$. Así, el perímetro buscado es

$$|v_1|+|v_2|+|v_3|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}+\sqrt{1^2+3^2+(-3)^2}+\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{33}+\sqrt{19}+\sqrt{6}\approx 12.55.$$

A.4.

a) Usando que A y B son independientes se tiene

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.3+0.5-(0.3\cdot 0.5)=0.65.$$

b) Como $P(C\,|\,A)=P(A\cap C)/P(A)=0.5$, se tiene que $P(A\cap C)=0.5\cdot 0.3=0.15$. En consecuencia

$$P(A\cap\overline{C})=P(A)-P(A\cap C)=0.3-0.15=0.15.$$

c) Como $P(\overline{A}\,|\,D)=0.2$, tenemos que $P(A\,|\,D)=1-P(\overline{A}\,|\,D)=0.8$. Por tanto,

$$P(A\,|\,D)=\frac{P(D\,|\,A)P(A)}{P(D)}\Rightarrow P(D)=\frac{P(D\,|\,A)P(A)}{P(A\,|\,D)}=\frac{0.5\cdot 0.3}{0.8}=0.1875.$$

B.1.

a) Sea A la matriz de los coeficientes y A' la matriz ampliada, $|A| = -(a^2+2a-15) = 0 \Leftrightarrow a = -5$ y $a = 3$.
Si $a \neq 3$ y $a \neq -5 \Rightarrow \text{rango}A = \text{rango}A' = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Si $a = 3$ o $a = -5 \Rightarrow \text{rango}A = \text{rango}A' = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $a = 3$, resulta $\left.\begin{array}{c} x+y=0 \\ 2y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \lambda,\ y = -\lambda,\ z = 3+2\lambda, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$

c) Para $a = 5$, como $|A| = -20$, $|A_x| = 0$, $|A_y| = 0$, $|A_z| = 3|A| = -60 \Rightarrow x = 0, \ \ y = 0, \ \ z = 3.$

B.2.

a) El dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$, por lo que si $x \neq \pm 1$, la función es continua por estar formada por funciones elementales. Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = -1$. En $x = 1$ f no está definida y por tanto no es continua.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = [1^{-\infty}] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{2+x^2}-1\right)^{2x^2-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{\frac{2+x^2}{-2}\cdot\frac{-4x^2+2}{2+x^2}} = e^{-4}.$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3-3x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(\frac{-2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3-3x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{-x^2}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}\ln|1-x|\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3}\ln 2.$

B.3.

a) Unas ecuaciones de r son $\left\{\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2y+z=-1 \end{array}\right.$. Al cortar con $\pi : x - z = 2$ se obtiene $(1,0,-1)$, así que r y π se cortan en ese punto.

b) La proyección ortogonal del punto A sobre el plano π es la intersección de π con la recta ortogonal a π por A. Como el vector normal a π es $(1,0,-1)$, dicha recta es $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$. Por tanto la proyección es el punto $A'(2,1,0)$.

c) La proyección ortogonal O de A sobre r, es el corte de r con el plano normal a r que pasa por A. Dicho plano tiene por vector normal al vector director de r, $(2,1,-2)$. Por tanto, el plano tiene ecuación $2x+y-2z=1$. Al cortarlo con $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2y+z=-1 \end{array}\right.$ obtenemos $O(1/3,-1/3,-1/3)$. Puesto que el punto simétrico A'' verifica que $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA''}$, tenemos que $A'' = A + 2\overrightarrow{AO} = (1,1,1) + 2\left(\dfrac{1}{3}-1, -\dfrac{1}{3}-1, -\dfrac{1}{3}-1\right) = \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{3}\right).$

B.4.

a) Si X es la variable "longitud de la sardina en mm", nos piden $P(X > 160)$ que calculamos tipificando a la normal Z de media 0 y desviación típica 1:

$$P(X > 160) = P\Big(Z > \frac{160-175}{25.75}\Big) = P(Z > -0.58) \approx 0.7190.$$

Así, aproximadamente un $72\,\%$ de la captura serán de la calidad exigida.

b) Hemos de buscar $t < 175$ mm tal que $P(t < X < 175) = 0.18$, es decir $P\Big(\dfrac{t-175}{25.75} < Z < 0\Big) = 0.18$. De la tabla de la normal vemos que $\dfrac{t-175}{25.75} \approx -0.47$ de donde $t \approx 163$ mm.

c) La variable $T =$ "número de sardinas de longitud menor que 15 cm en cada caja de 10" sigue una distribución binomial $B(n=10, p)$ con

$$p = P(X < 150) = P(Z < (150-175)/25.75) \approx P(Z < -0.97) \approx 0.1660.$$

La probabilidad pedida es $P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0) = 1 - (1-p)^{10} = 0.8372.$